107年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子組
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、試求$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$之特徵值及特徵向量。（10 分）

二、令矩陣$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7&-6&-12\\-4&5&8\\6&-6&-11\end{bmatrix}$。

㈠試求一可逆矩陣 $\mathbf{Q}$ 與一對角矩陣 $\mathbf{D}$ 使得$\mathbf{D}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$，其中 $\mathbf{D}$ 必須為$\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix}$的型式。（10 分）

㈡試求 $\mathbf{A}^{25}+3\mathbf{A}^{100}$。（5 分）

三、試用拉普拉氏轉換（Laplace transform）方法求解聯立微分方程式：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t)+\dfrac{d}{dt}y(t)-x(t)=0\\[2mm]\dfrac{d}{dt}x(t)+2\dfrac{d}{dt}y(t)=\sin(2t),\quad x(0)=y(0)=0\end{cases}$$

。（10 分）

四、一隨機變數 X 之機率密度函數（density function）為 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$，

其中$\lambda>0$，求$E[X|X>5]$為何？（15 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　代號：6611

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，下列何者不是 **A** 的特徵值（eigenvalue）？

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

2 某向量空間 $\{[a+c \quad b-a \quad c-b \quad b+a]^T \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$，則下列何者不為其基底向量之一？

(A) $[1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$　(B) $[0 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^T$　(C) $[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$　(D) $[0 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$

3 關於線性方程式 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 27 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，下列敘述何者正確？

(A)具有唯一解
(B)具有無窮多個解
(C)無解
(D) $(x_1,x_2,x_3)=(5,-27,7)$ 為一解

4 設 S 為 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ 型態的所有 $\mathbf{R}^3$ 向量所組成的集合（其中 $x, y \in \mathbf{R}$），則向量 $\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 在 S 上的投影向量為何？

(A) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

5 給定矩陣 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，下列敘述何者錯誤？

(A) $\{[1\ 2\ 1],[0\ 1\ -1],[0\ 0\ 1]\}$ 可為矩陣 **A** 列空間（row space）的一組基底（basis）

(B) $\{[0\ 1\ 1]^T,[0\ 2\ 0]^T,[-2\ 1\ 3]^T\}$ 可為矩陣 **A** 行空間（column space）的一組基底（basis）

(C)矩陣 **A** 的零空間（null space）之維度（nullity）為 1

(D)矩陣 **A** 的秩（rank）為 3

6 假設函數 $f(t)=te^{-t}\cos t$ 的拉普拉氏轉換（Laplace transform）為 $F(s)=\dfrac{as^2+bs+c}{\left(s^2+2s+2\right)^2}$，其中 a, b, c 是常數，求 $a+b+c=$？

(A)–3 (B)–1 (C)1 (D)3

7 假設 $w=f(z)=z^2+3z$，若 $z=1+3i$，下列敘述何者正確？

(A) $f(1+3i)$ 的實部（Real part）為 13
(B) $f(1+3i)$ 的虛部（Imaginary part）為 15
(C) $f(1+3i)$ 的實部（Real part）為 5
(D) $f(1+3i)$ 的虛部（Imaginary part）為–15

8 下列複數函數何者在任意範圍都是可微分（differentiable）？其中 $z=x+yi$。

(A) $f(z)=|z|^2$
(B) $f(z)=\mathrm{Im}[z]$
(C) $f(z)=\log_{\frac{\pi}{4}}(z)$
(D) $f(z)=x^3+2xy^2+i(y^3+2x^2y)$

9 令 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-5)^n$ 為一複數冪級數（complex power series），且已知其收斂半徑為 3，則下列敘述何者錯誤？

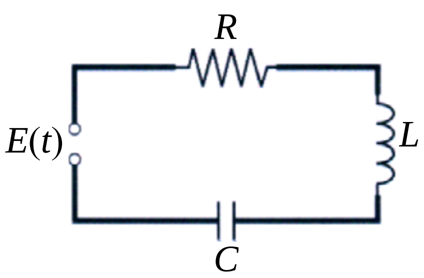
(A)此級數在 $z=0$ 收斂
(B)此級數在 $z=5$ 收斂
(C)此級數在 $z=7+2i$ 收斂
(D)此級數在 $z=3-2i$ 收斂

10 下列何者為微分方程式 $y''-2y'+y=-12e^x$ 之通解（其中 $y'\equiv\dfrac{dy}{dx}$）？（選項中，c_1、c_2 為任意常數）

(A) $y=c_1+c_2e^x-6xe^x$
(B) $y=c_1e^x+c_2xe^x-6x^2e^x$
(C) $y=c_1+c_2e^x-24xe^x$
(D) $y=c_1e^x+c_2xe^x-24x^2e^x$

11 下圖顯示一串聯 RLC 電路，其輸入電壓為 $E(t)=E_0\sin\varpi t$，串聯電流為 $I(t)$。描述此電路之二次微分方程式為 $I''+aI'+bI=\dfrac{1}{L}E_0\varpi\cos\varpi t$。試求出 a 及 b 值。

(A) $a=\dfrac{R}{L}, b=\dfrac{1}{LC}$
(B) $a=\dfrac{R}{L}, b=\dfrac{C}{L}$
(C) $a=\dfrac{1}{LR}, b=\dfrac{C}{L}$
(D) $a=\dfrac{1}{LR}, b=\dfrac{1}{LC}$



12 假設二次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ 之通解為 $\mathrm{A}\cos 2\pi x + \mathrm{B}\sin 2\pi x$，其中 A 及 B 為任意常數，試求出 a 及 b 值。

(A) $a = 4\pi^2, b = 0$　(B) $a = 0, b = 4\pi^2$　(C) $a = 0, b = -4\pi^2$　(D) $a = -4\pi^2, b = 0$

13 $z = 1 + i$，則複數對數 $\ln z$ 為何？（選項中 n 為整數）

(A) $i\sqrt{2}\ln(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$　(B) $-i\sqrt{2}\ln(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$　(C) $\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$　(D) $\ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$

14 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，若有一可逆矩陣 $\mathbf{Q}$ 與一對角矩陣 $\mathbf{D}$ 滿足 $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^{-1}$，試問 $\mathbf{D}$ 可為何？

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15 求 cosh(at)cos(at)之拉普拉氏轉換（Laplace transform）為下列何者？

(A) $\frac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$　(B) $\frac{2a^2 + s^2}{s^4 + 4a^4}$　(C) $\frac{s^2 - 2a^2}{s^4 + 4a^4}$　(D) $\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$

16 假設週期函數 $f(t) = t^2$，$-1 \le t < 1$，週期為 2，求其 Fourier 級數中的常數項。

(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{5}{6}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{3}{5}$

17 試求 $\frac{\sin 3t}{\pi t} * \cos 10t$ 為何？其中*表示迴旋積分（convolution integral）。

(A) $-\frac{1}{2\pi}$　(B) $\frac{1}{2\pi}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D)0

18 6 位老師被分配教授「工程數學」課程的 4 個章節，如果每位老師最多分配一個章節，有幾種分配方式？

(A)90　(B)180　(C)240　(D)360

19 設離散隨機變數（random variable）X 和 Y 的聯合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.1\delta(x+1)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y-2) + 0.4\delta(x-1)\delta(y+2) \\ + 0.2\delta(x-1)\delta(y-1) + 0.1\delta(x-1)\delta(y-3)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 為單位脈衝函式（unit impulse function），則 $E[XY]$之值為何？其中 $E[Z]$定義為隨機變數 Z 的期望值。

(A)0　(B)–0.3　(C)–0.5　(D)–0.6

20 某隨機變數 X 之期望值 $E[X] = 1$，變異數 $\mathrm{Var}[X] = 2$，則 $E[(1+X)^2] = ?$

(A)3　(B)5　(C)6　(D)12