

106年公務人員特種考試司法人員、法務部  
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報  
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：60930

全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組（選試英文）

科目：數論

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、如果  $p, p+2$  兩個數都為質數，我們稱  $(p, p+2)$  為一對孿生質數。試證明  $(p, p+2)$  為一對孿生質數的充分必要條件為  $4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$ 。(20分)

二、 $\varphi(n)$  代表尤拉 Phi-函數 (Euler Phi-function)。試證明：

(一)對任意正整數  $n$ ， $\varphi(n)$  必整除  $n!$ 。(15分)

(二)若正整數  $n$  為奇數， $n$  必整除  $2^{n!} - 1$ 。(5分)

三、(一)證明 2 為  $\text{mod } 13$  的原根 (Primitive root)。(5分)

(二)試求  $4x^9 \equiv 7 \pmod{13}$  的整數解。(15分)

四、設  $p$  為一奇質數。試證明同餘方程式  $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  必有一組整數解  $(x_0, y_0)$  滿足

$0 \leq x_0 \leq \frac{p-1}{2}$  且  $0 \leq y_0 \leq \frac{p-1}{2}$ 。(20分)

五、數列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$ ；稱為費波那契數列 (Fibonacci sequence)。

1843 年法國數學家比內 (J-P-M. Binet) 發現  $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ 。假設

$p \geq 7$  為一滿足  $p \equiv 2 \pmod{5}$  的質數，試證明若  $2p-1$  也是質數，則  $2p-1$  必整除  $a_p$ 。

(20分)