105年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子組
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、某剛體 B（rigid body）以固定之角速度 $\vec{w}$ 旋轉，已知該剛體上之任一點 $P(x, y, z)$ 之瞬時速度（instant velocity）可利用公式 $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$ 求得，其中 $\vec{r}$ 為 P 點之位置向量（position vector），試求出 $\nabla\times\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 之關係。（15 分）

二、設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$，求：

㈠其特徵值（eigenvalues）及其特徵向量（eigenvectors）。（5 分）
㈡以㈠之解對角化此矩陣。（5 分）

三、求解 $y''-4y=-7e^{2x}+x$；$y(0)=1$，$y'(0)=3$，其中 $y'\equiv\dfrac{dy}{dx}$，$y''\equiv\dfrac{d^2y}{dx^2}$。（15 分）

四、二維隨機變數 X 與 Y 的結合機率密度函數（joint probability density function）為 $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6(x+y^2)}{5}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0, & otherwise\end{cases}$。試分別求出 X 與 Y 的邊際機率密度函數（marginal probability density function）$f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　代號：6608

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　設 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，求矩陣 e^{At} 的行列式的值＝？其中 t 為實數。

(A)0　(B)1　(C)-1　(D) $e^{2t}-e^{-2t}$

2　下列何者為以兩向量 u = (-3, 4, 1)及 v = (0, -2, 6)為相鄰兩邊所圍出的平行四邊形的面積？

(A) $\sqrt{1036}$　(B) $\sqrt{1039}$　(C) $\sqrt{1046}$　(D) $\sqrt{1049}$

3 求點$(1, -4, -3)$與平面 $2x-3y+6z=-1$ 之最短距離值為何？

(A) $3/7$　(B) 3　(C) $3/49$　(D) $5/7$

4 下列何者是矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 的特徵向量？

(A) $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\end{bmatrix}$

(B) $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$

(D) $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\mathbf{e}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

5 令 $N(A)$代表矩陣 A 之零空間（null space）。當 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，則下列何者屬於 $N(A)$？

(A)$(1,1,-1)^T$　(B)$(1,0,1)^T$　(C)$(2,1,4)^T$　(D)$(1,0,0)^T$

6 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數（complex series），且已知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=L$，則下列敘述何者錯誤？

(A)若 L<1，則此級數收斂
(B)若 L<1，則此級數絕對收斂（absolutely convergent）
(C)若 L>1，則此級數發散
(D)若 L=1 且 $\lim_{n\to\infty} z_n=0$，則此級數收斂

7 有一矩陣 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$，求 A^{99}=？

(A) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$　(B) $33\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$　(C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

8　下列何者為 $e^{-z+i}=1-i$ 之解？其中 $i=\sqrt{-1}$ 。

(A) $z=-\ln(\sqrt{2})+i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$　(B) $z=\ln(\sqrt{2})+i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$　(C) $z=-\ln(\sqrt{2})-i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$　(D) $z=\ln(\sqrt{2})-i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$

9　令 z 與 w 為複數，下列敘述何者錯誤？

(A) $(\overline{z+w})=\bar{z}+\bar{w}$　(B) $\overline{zw}=-zw$　(C) $|z|=|\bar{z}|$　(D) $z\bar{z}=|z|^2$

10　假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-i|=2$ ，試求積分 $\oint_C \frac{1}{(z^2+4)}dz$ 為何？

(A) 0　(B) $\frac{-\pi}{2}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) 2π

11　下列何者是 $y'''+y''-4y'-4y=0$ 的通解？

(A) $e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$ ，其中 c_1,c_2 為常數

(B) $e^{-x}[(c_1+c_2x)\cos 2x+(c_3+c_4x)\sin 2x]$ ，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 為常數

(C) $c_1e^{x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}$ ，其中 c_1,c_2,c_3 為常數

(D) $c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{2x}$ ，其中 c_1,c_2,c_3 為常數

12　若 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為 $L\{f(t)\}=F(s)$，下列何者錯誤？

(A) $L\{e^{at}\cos\omega t\}=\frac{s-a}{s^2+\omega^2}$

(B) $L\{t^5\}=\frac{5!}{s^6}$

(C) $L\{\frac{t}{2\beta}\sin\beta t\}=\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$

(D) $L\{u(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}$ ，其中 $u(t)$ 為單位步階函數（unit step function）

13　函數 $f(t)=(t^2+1)u(t-2)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）為何？其中 $u(t)$ 為單位步階函數（unit step function）。

(A) $\left[\frac{s^2+2}{s^3}\right]e^{-2s}$　(B) $\left[\frac{(s-2)^2+2}{(s-2)^3}\right]e^{-2s}$　(C) $\left[\frac{5s^2+4s+2}{s^3}\right]e^{-2s}$　(D) $\left[\frac{s^2+2s+2}{s^3}\right]e^{-2s}$

14 下列何者是 $y' = \dfrac{y+x}{y-x}, y(0) = -2$ 的解？

(A) $y^2 - 2xy - x^2 = 4$ (B) $y^2 = 2x^2 \ln \dfrac{1}{|x|}$ (C) $x^2 + xy + y^2 = 4$ (D) $y^2 - x^2 = 4$

15 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n(n-1)}\right)$ 之收斂值為下列何者？

(A)0 (B)1 (C)-1 (D)2

16 若 $y = ax^m + bx^n$ 為 $x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$ 之解，且 $m \neq n$，則 $m+n$ 之值為何？其中 a,b,m,n 為常數，$y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$，$y'' \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2}$。

(A)-4 (B)-3 (C)1 (D)4

17 連續隨機變數 X,Y,Z 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} c \cdot x^2 e^{-x(2+y+z)}, & \text{if } x,y,z > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

，c 值為何？

(A)1 (B)2 (C)4 (D)8

18 某工廠有 3 台機器 B_1, B_2, B_3 分別生產 30%、45%和 25%的產品。已知 3 台機器的產品中分別有 2%、3%和 2%的瑕疵品。假設現在任意選取一個產品，它是瑕疵品的機率為何？

(A)0.07 (B)0.0245 (C)0.0135 (D)0.021

19 假設隨機變數 X 的機率密度函數(probability density function)為 $f(x)$ 及累積分布函數(cumulative distribution function) 為 $F(x)$。已知 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x}{2}}, \text{當} x > 0 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$，下列敘述何者錯誤？

(A) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$，當 x >0 (B) $P(X \geq 3) = e^{\frac{-3}{2}}$ (C) $P(X < 2) = 1 - e^{-1}$ (D) $P(X = 2) = \dfrac{1}{2}e^{-1}$

20 若 $\mu(x,y)$ 為微分方程式 $y' = \dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$ 的積分因子（integrating factor），則 $\mu(x,y)$ 須滿足下列何種條件？

(A) $\dfrac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x} = 0$ (B) $\dfrac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial y} = 0$

(C) $\dfrac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$ (D) $\dfrac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial y}$