103年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：電子組
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、令 quadratic form $Q = x^T A x = 10$，其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$，

㈠ Q 為那一種圓錐曲線？（2分）

㈡求 Q 的正交主軸轉換矩陣（Orthogonal Principal Axes Transformation Matrix）。（8分）

二、求解 $y'' - 2y' - 8y = 10e^{-x} + 8e^{2x}; y(0)=1, y'(0)=4$，其中 $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$，$y'' \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2}$。（15分）

三、求 $1+i$ 的四次方根。（10分）

四、兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2cx, & 0 \le x \le 2, |y| \le x^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$，求

㈠ c =？（5分）

㈡ X 之邊際機率密度函數（Marginal probability density function）$f_X(x)$ =？（5分）

㈢ Y 之邊際機率密度函數（Marginal probability density function）$f_Y(y)$ =？（5分）

乙、測驗題部分：（50分）　　　　**代號：6308**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　假設 $z(x,y) = 3000 - x^2 - 9y^2$ 是一座山距離海平面的高度，試問在點 P(4, 1)的位置，往那一個方向具有最陡峭的高度變化？

(A) $[-1, -2.25]$　(B) $[-1, 2.25]$　(C) $[-8, 18]$　(D) $[8, 18]$

2 若 F, G, H 為向量，α 為純量，有關外積（Cross Product）的性質，何者錯誤？

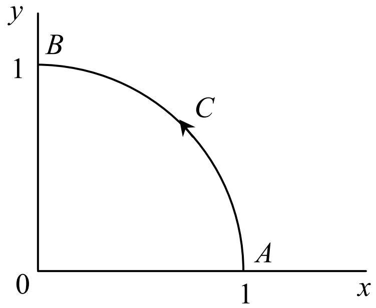
(A) $F\times G=G\times F$

(B) $F\times G$ 與 G, F 均正交（Orthogonal）

(C) $F\times(G+H)=F\times G+F\times H$

(D) $\alpha(G\times H)=(\alpha G)\times H$

3 $F=[-y,-xy]$，C 為下圖所示從 A 至 B 的圓弧，其線積分 $\int_c F\cdot dr=\frac{\pi}{a}+\frac{1}{b}$，則下列何者屬實？



(A) $a+b=1$

(B) $a+b=7$

(C) $a+b=-1$

(D) $a+b=-7$

4 若 $\vec{F}=x\ \vec{i}+y\ \vec{j}+z\ \vec{k}$，計算 $\nabla\cdot\vec{F}$ 與 $\nabla\times\vec{F}$ 各為何？

(A) $\nabla\cdot\vec{F}=8,\ \nabla\times\vec{F}=\vec{k}$

(B) $\nabla\cdot\vec{F}=8,\ \nabla\times\vec{F}=\vec{0}$

(C) $\nabla\cdot\vec{F}=3,\ \nabla\times\vec{F}=\vec{k}$

(D) $\nabla\cdot\vec{F}=3,\ \nabla\times\vec{F}=\vec{0}$

5 對於矩陣特徵問題 $AX=\lambda X$，得到特徵值 λ 為實數的充分條件為何？

(A) A 是對稱（symmetric）矩陣

(B) A 是正交（orthogonal）矩陣

(C) A 是 Hermitian 矩陣

(D) A 是 Skew-Hermitian 矩陣

6 令 $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 7\\ 3 & 6 & 8\end{bmatrix}$ 及 $B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 9\\ 10 & 13\end{bmatrix}$，求跡數（trace）tr (AB) = ？

(A) 290

(B) 284

(C) 280

(D) 286

7 下列何者 $T：R^2\rightarrow R^2$ 為線性轉換函式？

(A) $T(\mathrm{x},\mathrm{y})=(x+y,3y)$

(B) $T(\mathrm{x},\mathrm{y})=(2x-1,3y+1)$

(C) $T(\mathrm{x},\mathrm{y})=(x^2,3y+2)$

(D) $T(\mathrm{x},\mathrm{y})=(2,3)$

8　設矩陣 $A=\begin{bmatrix}10 & -8\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，則 A^3-8A^2+15A 為何？

(A) 0　(B) A　(C) $3A$　(D) $5A$

9　下列選項何者為 $e^z=1+i\sqrt{3}$ 的一解？（註：$i=\sqrt{-1}$ ）

(A) $z=1+i\,(1/3)\pi$　(B) $z=1+i\,(1/6)\pi$

(C) $z=\ln(2)+i\,(4/3)\pi$　(D) $z=\ln(2)+i\,(7/3)\pi$

10　令 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 為一複數冪級數（complex power series），且已知其在 $z=3+4i$ 時為收斂，則下列敘述何者為正確？（註：$i=\sqrt{-1}$ ）

(A)對所有實部小於 3 的複數 z，此複數冪級數為收斂

(B)對所有虛部小於 4 的複數 z，此複數冪級數為收斂

(C)對所有 $|z|<5$ 的複數 z，此複數冪級數為收斂

(D)對所有 $|z|\le 5$ 的複數 z，此複數冪級數為收斂

11　求 $\dfrac{x-2}{x^2+4x+5}$ 對中心點 $x_0=-2$ 的泰勒展開級數（Taylor expansion series）的收斂半徑？

(A) 0　(B) 1　(C) $\sqrt{5}$　(D) ∞

12　$x^2y'+y^2=xy$ ，則 $y=$？

(A) $\dfrac{x}{\ln x}+C$　(B) $\dfrac{\ln x}{x}+C$

(C) $\dfrac{\ln x+C}{x}$　(D) $\dfrac{x}{\ln x+C}$

13　求解 $\dfrac{dy}{dx}=6e^{3x}y^2$ ， $y(0)=1$

(A) $y=\dfrac{-1}{2-3e^{3x}}$　(B) $y=\dfrac{1}{3-2e^{3x}}$

(C) $y=\dfrac{1}{3-2e^{2x}}$　(D) $y=\dfrac{-1}{2-3e^{2x}}$

14　若函數 $\hat{f}(w)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin 2w}{w}$ 為 $f(t)$ 之傅立葉轉換，下列何者正確？

(A) $f(t)=\begin{cases}1, & \text{當 -2} < x < 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　(B) $f(t)=\begin{cases}1, & \text{當} 0 < x < 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(C) $f(t)=\begin{cases}1, & \text{當} 0 < x < 2\\ -1, & \text{其他}\end{cases}$　(D) $f(t)=\begin{cases}1, & \text{當 -2} < x < 2\\ -1, & \text{其他}\end{cases}$

15 定義$\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，極座標轉換$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，則下列何者正確？

(A) $\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

(B) $\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

(C) $\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

(D) $\nabla^2 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{\theta}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

16 下列何者不可能是$x^2y''+Axy'+By=0$的解？其中A和B為常數。

(A) $x^2\cos(3\ln(x))$

(B) $x^3\ln(2x)$

(C) e^2+x

(D) e^{2x}

17 下列何者之拉普拉斯轉換（Laplace transform）不存在？

(A) e^{3t}

(B) $\dfrac{1}{t}$

(C) e^{88}

(D) $\cos t$

18 假設X為連續型隨機變數，具有機率密度函數（probability density function）$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$，

試求$Y=8X^3$在$0<y<8$之機率密度函數$f_Y(y)$為何？

(A) $\dfrac{1}{8}y^{-1/4}$

(B) $\dfrac{1}{6}y^{-1/3}$

(C) $\dfrac{1}{4}y^{-1/2}$

(D) $\dfrac{1}{2}y^{-1}$

19 有 200 位成人中其性別和教育程度的情形如下：

教育程度	男性	女性
國小	38	45
中學	28	50
大學	22	17

假設從這 200 位成人中隨機挑選 1 人，已知此人是女性，請問此人沒有大學教育程度的機率為何？

(A) 17/200

(B) 17/112

(C) 95/112

(D) 95/200

20 假設兩個隨機變數X和Y的結合機率密度函數（joint probability density function）為

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}24xy, & 當\ 0<x<1,\ 0<y<1,\ x+y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，試問$P(X\ge 0.5)=$？

(A) 5/16

(B) 3/5

(C) 2/3

(D) 1/8