

100 年公務人員特種考試民航人員、外交領事人員及國際新聞人員、國際經濟商務人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員及社會福利工作人員考試試題

代號：60860

全三頁
第一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、利用拉氏轉換 (Laplace transform) 解 $f(t) = e^{-3t} \left[e^t - 3 \int_0^t f(\tau) e^{3\tau} d\tau \right]$ 。(10 分)

二、考慮一圓錐面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，並定義一點 $P_0 = (1, 1, \sqrt{2})$ 。

(一)試求此圓錐面於 P_0 點之切平面方程式。(5 分)

(二)試求此切平面通過 P_0 點之法線方程式參數表示法。(5 分)

(三)考慮在此圓錐面上之一條曲線 $C = \{ x = \cos(t), y = \sin(t), z = 1, 0 \leq t \leq 2\pi \}$ ，試求此曲線 C 上任何一點的曲率 $\kappa(t)$ 。(5 分)

三、令右上標 T 表示轉置 (transpose)、 $E = [u_1, u_2, u_3]$ 、 $F = [v_1, v_2]$ ，其中 $u_1 = [-1 \ 1 \ 1]^T$ 、 $u_2 = [1 \ 0 \ -1]^T$ 、 $u_3 = [1 \ 2 \ 1]^T$ 、 $v_1 = [2 \ -1]^T$ 、 $v_2 = [-1 \ 1]^T$ ，若一線性轉換 (linear transformation) L 相對於基底 (basis) E 及 F ($L: E \rightarrow F$) 之代表矩陣為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ，試

判定 L 相對於標準基底 R^3 及 R^2 ($L: R^3 \rightarrow R^2$) 之線性轉換函數， $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = ?$ (15 分)

四、利用留數 (residue) 觀念，試求 $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ 之值。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：6608

- (一)本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 已知微分方程式 $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$ ，試求 α 及 β 之值，並判定下列何者正確？(題中 α 、 β 、 c_1 及 c_2 為常數)

- (A) $\alpha + \beta = -11$ (B) $\alpha + \beta = 11$ (C) $\alpha + \beta = -5$ (D) $\alpha + \beta = 5$

(請接第二頁)

100 年公務人員特種考試民航人員、外交領事人員及國際新聞人員、國際經濟商務人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員及社會福利工作人員考試試題

代號：60860

全三頁
第二頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

- 2 下列何者可為 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ 之解？
 (A) $y = e^{-x^2}$ (B) $y = 1 + e^{-x^2}$ (C) $y = 2 + e^{-x^2}$ (D) $y = 3 + e^{-x^2}$
- 3 設微分方程式 $y' + ay = 0$, $y(0) = y_0$ 的級數解 (series solution) 為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!}$, 試求常數 a 及 y_0 之值, 並判定下列何者正確？
 (A) $a + y_0 = 2$ (B) $a + y_0 = 3$ (C) $a + y_0 = 4$ (D) $a + y_0 = 5$
- 4 下列何者為微分方程式 $\frac{y' + 2x}{y^2 + 1} = 2x$ 之通解 (其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$)？
 (A) $y = \frac{2}{c - x^2}$, 其中 c 為常數 (B) $y = \frac{2}{c + x^2}$, 其中 c 為常數
 (C) $y = \frac{1}{c + x^2}$, 其中 c 為常數 (D) $y = \frac{1}{c - x^2}$, 其中 c 為常數
- 5 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) 為 $L\{f(t)\}$, 令 $L\{f(t)\} = \frac{3s}{(s^2 + 9)^2}$, 則 $f(t)$ 可能為何？
 (A) $\frac{1}{2}t \sin(3t)$ (B) $t \sin(3t)$ (C) $t \cos(3t)$ (D) $3t \cos(3t)$
- 6 向量場 $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (zx - \sin(y))\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ 在點 $P = (-1, 0, 1)$ 的散度 (divergence) 為何？
 (A) $-\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (C) -1 (D) 0
- 7 假設路徑 C 為一逆時針方向的單位圓 $|z|=1$, 試問下列何者不會滿足 $\int_C f(z)dz = 0$ ？
 (A) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ (B) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$ (C) $f(z) = ze^{-z}$ (D) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$
- 8 假設複數 $z = x + iy$, 則下列那一個複變數函數是屬於全函數 (entire function)？
 (A) $f(z) = 2x + ixy^2$ (B) $f(z) = e^x e^{-iy}$ (C) $f(z) = xy + iy$ (D) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$
- 9 令複數 $z = x + iy$ 或 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$), 試問複變數函數 $f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) 的導數 (derivative) $f'(z)$ 為何？
 (A) $f'(z) = i \frac{f(z)}{z}$ (B) $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$ (C) $f'(z) = \frac{-i}{f(z)}$ (D) $f'(z) = \frac{f(z)}{2}$
- 10 若 $\nabla f = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 且 $v = 3x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 則 $\nabla \cdot (fv) - f\nabla \cdot v$ 為：
 (A) 0 (B) $3x + 6y - 2z$ (C) $6\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ (D) $-6x - 18y + 12z$
- 11 下列何者為 $\oint_C 2x \cos(2y)dx - 2x^2 \sin(2y)dy$ 之值, 其中 C 為一圓 $x^2 + y^2 = 4$ (定義為逆時針方向)。
 (A) $3\sqrt{2}$ (B) $-3\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) 0
- 12 有一個矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 以下那一項是錯的？
 (A) 其中一特徵值為 4 (B) 有一個特徵向量為 $[7 \ -4 \ 2]$
 (C) 有一個特徵向量為 $[1 \ 0 \ 0]$ (D) 其中一特徵值為 3

(請接第三頁)

100 年公務人員特種考試民航人員、外交領事人員及國際新聞人員、國際經濟商務人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員及社會福利工作人員考試試題

代號：60860

全三頁
第三頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

13 若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求 \mathbf{A}^{-1} ？

(A) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14 設 \mathbf{A} 及 \mathbf{B} 為任二 $n \times n$ 矩陣，且已知 \mathbf{A} 為奇異矩陣 (singular matrix)，則下列敘述何者不恒真？

(A) 矩陣 \mathbf{AB} 為奇異矩陣

(B) 矩陣 \mathbf{A}^T 為奇異矩陣

(C) 矩陣 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 為奇異矩陣

(D) 矩陣 $k\mathbf{A}$ 為奇異矩陣 (其中 k 為一常數)

15 設 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 為矩陣 \mathbf{A} 的特徵值，則下列敘述何者不恒真？

(A) 矩陣 \mathbf{A}^T 的特徵值為 $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$

(B) 矩陣 $3\mathbf{A}$ 的特徵值為 $3\lambda_1, \dots, 3\lambda_n$

(C) 若矩陣 \mathbf{A}^{-1} 存在，則其特徵值為 $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n$

(D) 矩陣 \mathbf{A}^2 的特徵值為 $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$

16 設 \mathbf{A} 及 \mathbf{B} 為任二 $n \times n$ 可逆 (invertible) 矩陣，則下列敘述何者正確？

(A) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

(B) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(C) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$

(D) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

17 隨機變數 X 、 Y 之期望值 (expected value) $E(X) = 1.8$ ， $E(Y) = 1.7$ ， $E(XY) = 3.3$ ，變異數 (variance) $\text{Var}(X) = 0.1$ ， $\text{Var}(Y) = 0.2$ ，則 $\text{Var}(X + Y) = ?$

(A) 0.24

(B) 0.64

(C) 0.78

(D) 0.96

18 假設 X 和 Y 為兩個獨立的隨機變數，則下列敘述何者錯誤？

(A) 隨機變數 XY 的期望值 (mean) 會滿足 $E(XY) = E(X)E(Y)$

(B) 隨機變數 X 和 Y 的協方差 (covariance) 會滿足 $\sigma_{XY} = 0$

(C) 隨機變數 $Z = X + Y$ 的變異數 (variance) 會滿足 $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

(D) 隨機變數 $Z = X - Y$ 的變異數 (variance) 會滿足 $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2$

19 二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Kx, & 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 。

求 K 之值為何？

(A) 0.5

(B) 1.0

(C) 2.0

(D) 4.0

20 十元錢幣 2 枚，其一擲出後人像向上之機率為 $\frac{1}{10}$ ，另一枚則為 $\frac{1}{2}$ 。若自此 2 枚錢幣隨機挑選一枚然後擲出 2 次，試求第 2 次擲出為人像之機率。

(A) $\frac{1}{10}$

(B) $\frac{3}{20}$

(C) $\frac{3}{10}$

(D) $\frac{3}{5}$