108年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及108年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

考 試 別：鐵路人員考試
等　　別：高員三級考試
類 科 別：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、令一行列式為 $\begin{vmatrix} 2+x & 3 & 5 \\ 2 & 3+x & 5 \\ 2 & 3 & 5+x \end{vmatrix}=0$，求 x 為何？（10 分）

二、令複變函數 $f(z)=\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$，試求：

㈠ $f(z)$ 的麥克勞林級數（Maclaurin series）展開式。（7 分）

㈡第㈠小題之級數的收斂半徑。（3 分）

三、$\dfrac{d^2y}{dx^2}+e^x y=e^{2x}$，$y(0)=1$，$\dfrac{dy(0)}{dx}=2$，以 $y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$ 解之，求 C_0、C_1、C_2、C_3。（15 分）

四、設一隨機變數（random variable）X，其期望值（expected value）$E[X]=-3$，X 的變異數（variance）$\sigma_X^2=2$。設 $Y=2X-3$，求：

㈠ Y 的期望值（expected value）：$E[Y]$。（5 分）

㈡ Y^2 的期望值（expected value）：$E[Y^2]$。（5 分）

㈢ Y 的變異數（variance）：σ_Y^2。（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　代號：4703

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 令 **u**, **v** 為二向量，則下列有關其內積（inner product）與外積（cross product）的敘述何者錯誤？

(A) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$　(B) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$　(C) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$　(D) $|\mathrm{u} \bullet \mathrm{v}| \le |\mathrm{u}||\mathrm{v}|$

2 在三度空間中，由 $P_1(4, 6, 5)$、$P_2(4, 9, 5)$與 $P_3(8, 6, 7)$所形成的三角形面積為何？

(A) $\sqrt{45}$　(B) $\frac{\sqrt{45}}{2}$　(C) 45　(D) $\frac{45}{2}$

3 下列何者是向量 $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在 $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 及 $w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 所延伸（span）的空間之投影向量（projection）？

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

4 試決定 a 與 b 之值，使以下系統方程式具有無限多組解（infinite number of solutions）？

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + y + az &= 4 \\ 3x + 2y + 2z &= b \end{aligned}$$

(A) $a = -\frac{3}{4}$，$b = -7$　(B) $a = \frac{3}{4}$，$b = 7$　(C) $a = -\frac{4}{3}$，$b = -7$　(D) $a = -\frac{4}{3}$，$b = 7$

5 假設矩陣 A 及 B 為兩個相同階數之方陣，且 A 及 B 兩矩陣皆為非奇異矩陣，下列敘述何者恆真？

(A) A+B 亦為非奇異矩陣　(B) $|\mathrm{AB}| = 0$

(C)假設 AB=A+B，則 AB=BA　(D) $adj(\mathrm{AB}) = adj(\mathrm{A})adj(\mathrm{B})$

6 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，下列何者不是 A 的特徵向量（eigenvector）？

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

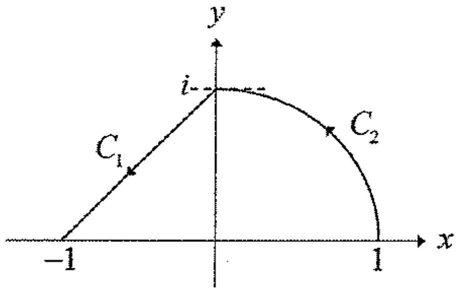
7 請計算 $\cos(2\pi i)$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$：

(A) 1　(B) i　(C) $\cosh(2\pi)$　(D) $\frac{1}{2}(e^{-2\pi} - e^{2\pi})$

8 求 $-1+4i$ 的極式（Polar form）？

(A) $-\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}$　(B) $\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(4))}$　(C) $-\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(0.25))}$　(D) $\sqrt{17}e^{i(\pi - \tan^{-1}(0.25))}$

9 根據下圖所示之路徑 $C = C_1 + C_2$， $z = x + yi$ ，試問線積分 $\int_C \bar{z} dz$ 為何？



(A) $1+\frac{\pi}{2}i$ (B) $(1+\frac{\pi}{2})i$ (C) $1+\frac{5\pi}{2}i$ (D) $(1+\frac{5\pi}{2})i$

10 給定一複數函數 $f(z) = x^2 - y^2 + i2|xy|$ ，其中 $z = x + yi$ ，則下列何者正確？

(A) $f(z)$在 $x > 0$ 且 $y>0$的範圍都是可解析（Analytic）

(B) $f(z)$在 $x < 0$ 且 $y<0$的範圍都是不可微分

(C)當 $xy<0$時， $f(z)$是可解析（Analytic）

(D)當 $xy>0$時， $f(z)$都是可微分且 $f'(z)=2x-i2y$

11 $z_1 = 4+3i$ ， $z_2 = 2-5i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ；則 $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 為何？（其中 $\bar{z}$ 表示 z 的共軛複數）

(A)23+14i (B)23－14i (C)－23+14i (D)－23－14i

12 求下列微分方程式的特解：

$xy'+y = \sin(x)$且初始條件$y(\frac{\pi}{3}) = 0$

(A) $xy = \frac{1}{2} + \cos(x)$ (B) $xy = \frac{1}{2} - \cos(x)$ (C) $xy=2-\cos(x)$ (D) $xy=2+\cos(x)$

13 已知微分方程式 $y''+3y'+2y = 12x^2$（其中 $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$）的特殊解是 $y(x) = ax^2 + bx + c$ ，a, b, c 是常數，則下列敘述何者正確？

(A) $5 < a+b+c < 10$ (B) $0 < a+b+c < 5$ (C) $-5 < a+b+c < 0$ (D) $-10 < a+b+c < -5$

14 邊界條件設定為$\phi(x, 0) = x^4$之偏微分方程式$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - 2\frac{y}{x} = 0$，其解為：

(A) $\phi = y^2 + x^4 e^{-4y}$ (B) $\phi = y^4 + x^2 e^{-4y}$ (C) $\phi = y^2 + x^2 e^{-4x}$ (D) $\phi = y^2 + x^4 e^{-4x}$

15 求微分方程式 $y''-y'+x^2y=0$ 的級數解：

(A) $a_0\left(1-\frac{1}{12}x^4+...\right)+a_1\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{24}x^4+...\right)$，其中 $a_0,\ a_1$ 為常數

(B) $a_0\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{24}x^4+...\right)+a_1\left(x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+...\right)$，其中 $a_0,\ a_1$ 為常數

(C) $a_0\left(1+\frac{1}{12}x^4+...\right)+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{24}x^4+...\right)$，其中 $a_0,\ a_1$ 為常數

(D) $a_0\left(1-\frac{1}{12}x^4+...\right)+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+...\right)$，其中 $a_0,\ a_1$ 為常數

16 定義函數 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換（Laplace transform）$L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，令 $L\{f(t)\}=\frac{6s}{(s^2+5)^2}$，則 $f(t)$ 為何？

(A) $\frac{6\sqrt{5}}{5}\cos\sqrt{5}t$ (B) $\frac{6\sqrt{5}}{5}\sin\sqrt{5}t$ (C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}t\cos\sqrt{5}t$ (D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}t\sin\sqrt{5}t$

17 設 $f(x)=\begin{cases}1, -2<x<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，求其傅立葉轉換（Fourier transform）中 $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ 為何？

(A) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin 2\omega}{\omega}$

(B) $\hat{f}(\omega)=\frac{\sin 2\omega}{\omega}$

(C) $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin 2\omega}{\omega}$

(D) $\hat{f}(\omega)=\sqrt{2\pi}\frac{\sin 2\omega}{\omega}$

18 令 Z 為一標準常態分布隨機變數（standard normal random variable），其機率密度函數（probability density function）為 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},-\infty<z<\infty$，試求 $Y=|Z|$ 之機率密度函數：

(A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\ ,0<y<\infty$

(B) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\ ,0<y<\infty$

(C) $2ye^{-y^2}\ ,0<y<\infty$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2y}}\ ,0<y<\infty$

19 給定一個隨機變數 X，其累積分布函數（cumulative distribution function）

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{2}{7}, & 0\le x<1\\ \frac{6}{7}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，試求機率 $P(0<X\le 2)$ 為何？

(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{6}{7}$

20 令 $X_1, X_2, ..., X_n$ 為獨立隨機變數，$a_1, a_2, ..., a_n$ 為任意實數，下列何者錯誤？

(A) $E\left[\sum_{i=1}^n a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n a_iE[X_i]$

(B) $Var\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_iVar(X_i)$

(C) $Cov(\sum_{i=1}^n a_iX_i,\ \sum_{j=1}^n a_jX_j)=\sum_{i=1}^n a_i^2Var(X_i)$

(D) $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n Cov(a_iX_i,\ a_jX_j)=\sum_{i=1}^n a_i^2Var(X_i)$