104年公務人員高等考試三級考試試題　　代號：26850　　全一頁

類　　科：資訊處理
科　　目：資料結構
考試時間：2小時　　座號：____________

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、有位程式設計師在撰寫程式時遇到了一個難解的問題，後來發現有兩個演算法可以解這個難題：演算法 A 的時間複雜度為$O(n^2\log(n!))$，演算法 B 的時間複雜度為$O(n^2((\log n)!))$。假設輸入資料的個數n通常都很大，他應該選擇那個演算法比較好，原因何在？（20 分）

二、樹（tree）是一個很常用的資料結構。一個樹是指一個沒有迴圈（cycle）的聯通圖（connected graph）。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠證明：每個具有n個節點（node）的樹，$n>1$，至少有 2 個分支度（degree）為 1 的節點。（分支度就是指有多少邊以此節點為端點。）

㈡用前項結果證明：每個具有n個節點的樹，$n>1$，恰好有$n-1$個邊（edge）。

三、給定一個權重圖（weighted graph），$G=(V,E,w)$，其中每個邊（edge）e的權重$w(e)$都是正整數，為了簡單，假設$V=\{1,2,...,n\}$。任意點v與起始點s的距離可以用一個矩陣$d[1..n]$來表示。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠設計一個只需$O(n)$空間的方法來記錄從s出發，到達每個點的最短路徑。

㈡說明計算與印出從起始點s到任意點$t\in V$的最短路徑的演算法。（解此小題時可參考 Dijkstra 或其他演算法來設計，且不須將 Dijkstra 或別的演算法做詳細的描述。）

四、有個矩陣$A[1..n]$，n的值很大。在矩陣A中存有n個正整數，且從小到大排列。給定某個整數x，二分搜尋法（binary search）可以在$O(\log n)$的時間內找出x在矩陣$A[1..n]$的位置，或宣告在$A[1..n]$中沒有x。在某個應用中，已知絕大部分的x都會出現在矩陣$a[1..n]$的前面m個元素，且 m 的值遠小於n，但是無法預知m的範圍。設計一個演算法，可以在$O(\log m)$的時間內完成搜尋。（20 分）

五、假設有個矩陣$A[1..n]$儲存n個整數。Quick sort 是一個排序演算法。假設有個副程式 partition(A,l,r)其輸入參數A是一個矩陣，$l,r,l<r<n$，是兩個指標。其回傳的值m也是一個指標。這個副程式可將矩陣中從l到r的這一段資料$A[l..r]$區分成兩段：$A[l..m]$和$A[m+1..r]$，使得在$A[l..m]$中的元素都小於或等於x，而在$A[m+1..r]$中的元素都大於或等於x，其中x是從$A[l..r]$中隨機選擇的一個整數。接下來要在此兩段資料遞迴執行 partition。避免這些遞迴計算可以用一個堆疊（stack）來處理。假設 partition(A,l,r)回傳m，則執行：

if $(l<m)$ push (l,m) into stack
if $(m+1<r)$ push $(m+1,r)$ into stack

一開始，堆疊中只有一組資料，$(1,n)$表示$A[1..n]$需要排序。如此反覆將堆疊最上面的資料(l,r)移出，執行 partition(A,l,r)，直到堆疊沒有資料為止。
（每小題 10 分，共 20 分）

㈠證明在最糟情況下，堆疊的高度可以達到$n/2$。

㈡設計一個好的演算法以降低 stack 的高度，並證明堆疊的高度最多只需要$\log n+1$。