104年公務人員高等考試三級考試試題　　代號：22080　　全一張（正面）

類　　科：統計

科　　目：統計學

考試時間：2 小時　　座號：＿＿＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠可以使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、某一汽車經銷商計算其每賣一部新車的獲利（以十萬元為單位）為$Y = X^2$，若X的機率密度函數如下：

$$g(x) = \begin{cases} c(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

㈠請計算求得c值。（5 分）

㈡推導求得Y之機率密度函數$f(y)$。（10 分）

㈢請計算該經銷商在賣下一部新車時，其獲利小於一萬元的機率。（5 分）

二、若考慮成對比較試驗（paired-difference experiment），每一成對觀測值$j(j=1,2\ldots,n)$，分別接受處理（treatment）i，$i=1$、2。以下模型描述此一試驗結果：

$$Y_{ij} = \mu_i + P_j + \varepsilon_{ij}$$

其中μ_i代表處理i的期望反應，P_j為第j個成對實驗單位的隨機效應，ε_{ij}為隨機誤差。對所有$i=1,2$，$j=1,2\ldots,n$，假設P_j為獨立的常態分配，其均數為$E(P_j)=0$，變異數$Var(P_j)=\sigma_P^2$；ε_{ij}為獨立的常態分配，$E(\varepsilon_{ij})=0$，$Var(\varepsilon_{ij})=\sigma^2$；且$P_j$與$\varepsilon_{ij}$互相獨立。

㈠若$\overline{Y}_i$為處理$i(i=1$、$2)$的n個觀測值之均數，請推導求得$E(\overline{Y}_i)$。（5 分）

㈡請推導求得$Var(\overline{Y}_i)$。（5 分）

㈢若$d_j = Y_{1j} - Y_{2j}$，$j=1,2\ldots,n$，且$\overline{d}$為其均數，s_d為標準差。推導求得$E(\overline{d})$。（5分）

㈣推導求得$Var(\overline{d})$。（7 分）

㈤在虛無假設$H_0:\mu_1-\mu_2=0$為真的情況下，請證明$\dfrac{\overline{d}\sqrt{n}}{s_d}$服從$t$分配；並說明其自由度。（13 分）

㈥若將原前述模型改為

$$Y_{ij} = \mu_i + P_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

假設P_{ij}為獨立的常態分配，其均數為$E(P_{ij})=0$，變異數$Var(P_{ij})=\sigma_P^2$；其餘符號之表達及假設與前述相同。推導求得此模型下的$Var(\overline{d})$；並比較此結果與題㈣的差異。（10 分）

（請接背面）

類　　科：統計
科　　目：統計學

三、若$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$為互相獨立且其機率密度函數如下：

$$f(y;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-y/\theta} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

㈠推導求得θ的最大概似估計（maximum likelihood estimator）。（10 分）
㈡推導求得$P(Y \le 2)$的最大概似估計。（5 分）
㈢若$Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$為最小順序統計量，推導求得$Y_{(1)}$之分配。（10 分）
㈣證明$\hat{\theta}_1 = nY_{(1)}$為$\theta$的不偏估計（unbiased estimator）。（4 分）
㈤推導求得$MSE(\hat{\theta}_1)$（mean square error of $\hat{\theta}_1$）。（6 分）