代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4－1

102 年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、線性方程組以矩陣的符號寫成 $AX=B$，令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{bmatrix};$$

㈠利用高斯消去法求解 $AX=B$。（5 分）

㈡利用反矩陣（matrix inverses）方法求解 $AX=B$。（5 分）

㈢利用 Cramer's 法則（Cramer's rule）求解 $AX=B$。（5 分）

二、複數函數 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+4)}$

㈠求 $f(z)$ 以 $z=1$ 為中心展開的羅倫級數（Laurent series）。（7 分）

㈡求 $f(z)$ 在 $z=1$ 的留數（residue）。（3 分）

三、求解下列微分方程式：

㈠ $y''-10y'+25y=0$ 之通解（general solution）。（5 分）

㈡ $y''+4y=8$； $y\left(\pi/4\right)=y\left(\pi/2\right)=1$ 之解。（5 分）

㈢ $x^3y'''+x^2y''-4y'=0$ 之通解。〔註：$x>0$〕（5 分）

四、兩個隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{XY}(x,y)=x+y;\ \begin{matrix}0<x<1\\0<y<1\end{matrix};\quad f_X(x)=x+\frac{1}{2};\quad f_Y(y)=y+\frac{1}{2}$$

㈠求 X 與 Y 之共變異數（covariance），$Cov[X,Y]$。（7 分）

㈡求 X 與 Y 之相關係數（correlation coefficient），$\rho_{X,Y}$。（3 分）

乙、測驗題部分：（50 分） **代號：2303**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 有一曲線之參數方程式為 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，$z=\sqrt{5}\,t$，其中 $0\le t\le 2\pi$，請問該曲線弧長為何？

(A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) 6π

2 下列何者為線積分 $\int_C yzdx+xzdy+xydz$ 之值，其中曲線 $C: x=t^2$；$y=t$；$z=t+3$，而 $0\le t\le 1$？

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 3

3 下列何者為 $\varphi=2xz+e^y z^2$ 在點 $(2,1,1)$ 於 $2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 之方向上之方向導數（directional derivative）？

(A) $e/\sqrt{14}$ (B) e (C) $\sqrt{14e}$ (D) $1/\sqrt{e}$

4 下列集合中之向量，何者為線性獨立（linear independent）？

(A) $\{(1,1),(1,2),(3,4)\}$ (B) $\{(1,3),(2,0),(-1,3),(7,3)\}$

(C) $\{(2,3,0),(1,-2,4),(1,1,0),(1,1,1)\}$ (D) $\{(2,0,1,-3),(0,1,1,1),(2,2,3,0)\}$

5 若 $\varphi(x,y,z)=xy-yz+xyz$，則其在點 $P=(0,-1,1)$ 於方向 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的改變率（rate of change）為何？

(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}$

6 若 **A** 是 $n\times n$ 的對稱實數矩陣，則下列那一項是錯的？

(A) **A** 一定可以對角化 (B)其特徵值不會有相同的

(C)其特徵值一定是實數 (D) **A** 的行列式值等於其所有特徵值之乘積

7 設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 為任二 $n \times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恒真？

(A) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

(B) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

(C)若 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 均為對稱矩陣（symmetric matrix），則 $\mathbf{AB}$ 及 $\mathbf{BA}$ 也必為對稱矩陣

(D) $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 及 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 均為對稱矩陣

8 令矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，其逆矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 表為 $[\mathrm{bij}]$，則下列何者錯誤？

(A) $\mathrm{b}_{12}=\frac{3}{32}$　(B) $\mathrm{b}_{21}=\frac{-1}{4}$　(C) $\mathrm{b}_{23}=\frac{3}{4}$　(D) $\mathrm{b}_{32}=\frac{-1}{2}$

9 若 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 則 $\mathbf{B}^2=\mathbf{O}$；試求 $e^{\mathbf{B}t}=$ ？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 1 & te^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10 設 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 均為 3×3 的矩陣，若 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的行列式值分別為 $\det(\mathbf{A})=-2$、$\det(\mathbf{B})=3$。則 $\det(-2\mathbf{AB})$ 之值為何？

(A) 12　(B) -12　(C) 48　(D) -48

11 試計算 $i^{(i^2-i)}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$：

(A) $e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，n 為任意整數　(B) $-e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，n 為任意整數

(C) $i\cdot e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，$n$ 為任意整數　(D) $-i\cdot e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，$n$ 為任意整數

12 複數函數 $f(z)=|z|^2$ 在下列何點可微分？

(A) $z=-1$　(B) $z=0$　(C) $z=1$　(D) $z=i$

13 求複變函數積分 $\int_C |z| dz$ 之值，其中積分路徑 C 爲複數平面上由原點至點 $2-2i$ 的直線，其中 $i=\sqrt{-1}$ ：

(A) $\sqrt{2}(1+i)$ (B) $\sqrt{2}(1-i)$ (C) $2\sqrt{2}(1+i)$ (D) $2\sqrt{2}(1-i)$

14 求解微分方程 $5y''-3.5y'+0.6y=0$ ，其解爲：

(A) $y=c_1e^{-0.4x}+c_2e^{0.3x}$ (B) $y=c_1e^{0.4x}+c_2e^{0.3x}$ (C) $y=c_1e^{0.4x}+c_2e^{-0.3x}$ (D) $y=c_1e^{-0.4x}+c_2e^{-0.3x}$

15 求解微分方程 $y^{(4)}-29y''+100y=0$ ，其解爲：

(A) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$ (B) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{5x}+c_4e^{-5x}$

(C) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$ (D) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{5x}+c_4xe^{5x}$

16 微分方程式 $x^3(1-x)y''+2xy'+y=\sin(x)$ 有幾個奇異點（singular points）？

(A) 2 個 (B) 3 個 (C) 4 個 (D)無窮多個

17 求解微分方程 $y'+y=y^2$ ，其解爲：

(A) $y=1+ce^{x}$ (B) $y=1/(1+ce^{x})$ (C) $y=1-ce^{x}$ (D) $y=1/(1-ce^{x})$

18 令 X 及 Y 爲均勻（uniformly）分布於 $(0,1)$ 之二獨立（independent）連續隨機變數（continuous random variable），試求 $P\left(|X-Y|\le\frac{1}{5}\right)=$ ？

(A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{8}{25}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{5}{16}$

19 $F(s)$ 爲 $f(t)$ 之拉普拉斯（Laplace）轉換，則 $u(t-a)f(t-a)$ 之拉普拉斯轉換爲何？其中 $u(t)$ 爲單位步階函數及 $a>0$ ：

(A) $e^{as}F(s)$ (B) $e^{-as}F(s)$ (C) $F(s-a)$ (D) $F(s+a)$

20 隨機變數 X 之期望值（expected value）$\mathrm{E}(X)=3$，變異數（variance）$\mathrm{Var}(X)=5$，則 $\mathrm{E}(3+4X+5X^2)=$ ？

(A) 38 (B) 65 (C) 85 (D) 93