101年公務人員高等考試三級考試試題　代號：35920 36020 36120　全一張（正面）

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程

科　　目：工程數學

考試時間：2 小時　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、若 $f(x)=x^2$，$-\pi \le x \le \pi$。

求：㈠ $f(x)$ 定義於 $[-\pi,\pi]$ 的傅立葉級數（Fourier series）（9 分）㈡ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$（3 分）

㈢ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$（3 分）

二、㈠若 λ 是一個非奇異（nonsingular）矩陣 A 的特徵值（eigenvalue），X 是 λ 對應的特徵向量（eigenvector），請證明 $\frac{1}{\lambda}$ 及 X 分別是 A^{-1} 的特徵值及其對應的特徵向量。（10 分）

㈡若 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，請用其最大的特徵值驗證㈠的結果。（5 分）

三、藉由考慮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 之收斂性，證明 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$，$0<r<1$。（10 分）

四、解 $(1+x^2)(dy-dx)=2xydx$，條件為 $y(0)=1$。（10 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　**代號：2303**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 解微分方程式 $y''-2y'+2y=0$；其中初值 $y(0)=-3$，$y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0$。

(A) $y=-3e^t\cos t$　(B) $y=-3\cos t$　(C) $y=-3e^{-t}\cos t$　(D) $y=-3\sin t$

2 下列何者可爲微分方程式 $(\sqrt{x^2+y^2}/y+2/x)dx+(\sqrt{x^2+y^2}/x+2/y)dy=0$ 之積分因子？

(A) x^2　(B) y^2　(C) xy　(D) $1/xy$

3 已知 $\vec{F}=y^3\vec{i}+x^3\vec{j}+z^3\vec{k}$，求出 $\iint_s \vec{F}\cdot\vec{n}dA$ 之值，其中 S：$x^2+4y^2=4$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$0\le z\le b$。

(A) $2\pi b^3$　(B) $\frac{1}{2}\pi b^3$　(C) $\frac{1}{2}\pi b^2$　(D) $\frac{1}{8}\pi b^3$

4 令 $\vec{v}$ 爲一常數向量，$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，則 $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{u})+\nabla\times(\vec{u}-\vec{v})$ 等於多少？

(A) 0　(B) $\vec{u}+\vec{v}$　(C) $\vec{u}$　(D) $\vec{v}$

5 橢圓 $x^2+4(y-1)^2=4$ 在點 $P(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})$ 的切線爲何？

(A) $\sqrt{2}(1-t)\vec{i}+(\frac{1}{\sqrt{2}}+1+t)\vec{j}$　(B) $\sqrt{2}(1-t)\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}-t)\vec{i}+(1+t)\vec{j}$　(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t)\vec{i}+(\sqrt{2}+1+t)\vec{j}$

6 若 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，請求出 $A^3-7A^2+11A-4I=$？

(A) 0　(B) I（單位矩陣 identity matrix）　(C) A　(D) $\begin{bmatrix}12 & 11 & 5\\ 4 & 13 & 17\\ 14 & 7 & 2\end{bmatrix}$

（請接背面）

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學

7 試問二次式（quadratic form）：$4x_1^2-4x_2^2+6x_1x_2=8$ 在$(x_1,x_2)-$平面上是那一種曲線？
(A)圓（circle） (B)橢圓（ellipse） (C)雙曲線（hyperbola） (D)拋物線（parabola）

8 設 x_1, x_2, x_3 為下列聯立方程組之解，

$$3x_1-x_2-x_3=0$$
$$x_1+5x_2+x_3=-4$$
$$-2x_1+3x_2+2x_3=2$$

則 $x_1+x_2+x_3$ 等於多少？
(A) -1 (B) 4 (C) $6\frac{1}{2}$ (D) $9\frac{2}{3}$

9 試求函數 $F(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}$ 的反拉普拉斯轉換（inverse Laplace transform）。
(A) $\frac{1}{2}(\sin t+t\cos t)$ (B) $\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$ (C) $\frac{1}{2}(\cos t-t\sin t)$ (D) $\frac{1}{2}(\cos t+t\sin t)$

10 $g(t)=\begin{cases}0, & \text{if } t<3\\ t^2, & \text{if } t\geq 3\end{cases}$，下列何者為 $g(t)$ 的拉普拉斯轉換 $L\{g(t)\}$？
(A) $(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s})e^{3s}$ (B) $(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{6}{s})e^{3s}$ (C) $(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s})e^{-3s}$ (D) $(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{6}{s})e^{-3s}$

11 反拉普拉斯轉換 $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+5}\right)$ 等於下列何者？
(A) $\sin 2(t-1)$ (B) $e^t\cos(2t)$ (C) $e^{-t}\cos(2t)$ (D) $\frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$

12 有一函數 $f(x)=x+\pi$，其中 $-\pi<x<\pi$ 且 $f(x+2\pi)=f(x)$，求其傅立葉級數為何？
(A) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n}\cos n\pi)\sin nx$ (B) $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n}\cos n\pi)\sin nx$
(C) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}\cos n\pi)\sin nx$ (D) $f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n}\cos n\pi)\sin nx$

13 利用傅立葉級數的觀念求出等式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}$ 中 c_n 的值，其中 $\delta(t)$ 為 Dirac delta 函數，T 是固定的週期。
(A) $\frac{1}{T}$ (B) $-\frac{1}{T}$ (C) $\frac{2}{T}$ (D) $\frac{-2}{T}$

14 定義函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$，其中 $i=\sqrt{-1}$。求 $f(t)\sin(\omega_0 t)$ 的傅立葉轉換為何？
(A) $\frac{i}{2}(F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0))$ (B) $\frac{1}{2}(F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0))$ (C) $\frac{1}{2}(F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0))$ (D) $\frac{i}{2}(F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0))$

15 級數 $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(x-5)^n$ 的收斂半徑（radius of convergence）為何？
(A) 1/10 (B) 1/5 (C) $\sqrt{10}$ (D) 10

16 求 $\int\sin(3z)\cos(3z)dz=$？
(A) $\frac{1}{6}\sin^2 3z+c$ (B) $\sin^2 3z+c$ (C) $6\sin^2 3z+c$ (D) $3\sin^2 3z+c$

17 求 $\frac{da^z}{dz}=$？
(A) a^z (B) $a^z\ln a$ (C) $\ln a$ (D) $a^z/\ln a$

18 極座標之二維位能函數（potential function）$u(r,\theta)$ 滿足 Laplace's 方程式 $\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$，若 u 與 θ 無關，亦即 $u=u(r)$，則下列何者可能為其解？
(A) $u=\frac{1}{r}$ (B) $u=\ln r$ (C) $u=e^{-r}$ (D) $u=re^{-r}$

19 給定一個隨機變數 X，已知期望值（mean）$E[X]=2$，$E[X(X-4)]=5$，則 $12-4X$ 的變異值（variance）為何？
(A) 4 (B) 13 (C) 17 (D) 144

20 給定一個連續隨機變數 X，它的機率密度函數為 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{50\pi}}e^{-\frac{x^2}{50}}$，$-\infty<x<\infty$。則 X^3 的期望值（mean）為何？
(A) 0 (B) 3 (C) 25 (D) 50