代號：34170
｜
34370
頁次：4－1

101年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設 $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$，其中 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

㈠試求矩陣 A 特徵值 λ_1，λ_2。（2 分）

㈡若 $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，試求矩陣 P。（3 分）

㈢求解 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，$t \geq 0$。（10 分）

二、設曲線 C 的參數表示式為 $x = 2\cos(t)$；$y = 2\sin(t)$；$z = 3$，其中 $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$，而沿其 C 曲線之質量密度函數（mass density function）為 $\delta(x, y, z) = xy^2$，求其質量中心為何。（15 分）

三、令 f 及 g 為向量空間 $C[a,\mathrm{b}]$ 上之實數連續函數，定義 $C[a,b]$ 上的內積為 $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$。設 $\mathrm{f(x) = x}$，$\mathrm{g(x) = x^2}$，$\mathrm{a = 0}$，$\mathrm{b = 1}$

㈠求 $\|f\|$。（5 分）

㈡求 f 與 g 間之距離 $d(f, g)$。（5 分）

四、隨機變數 X 之期望值（expected value）E(X)=2，變異數（variance）Var(X)=4，求：

㈠E[(3+2X)^2]＝？（5 分）

㈡Var[5+3X]＝？（5 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　　　　　　　　　**代號：7341**

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 下列何者爲函數 $f(t)=\cos(2t+10)$ 之拉氏轉換？

(A) $\frac{1}{s^2+4}[s\cos(10)-2\sin(10)]$　(B) $\frac{1}{s^2+4}[\cos(10)-2\sin(10)]$

(C) $\frac{2}{\mathrm{s}^2+4}[\mathrm{s}\cos(10)-\sin(10)]$　(D) $\frac{1}{s^2}[s\cos(10)-2\sin(10)]$

2 已知 $y_1=x^2$ 及 $y_2=x-1$ 爲 $(x^2-2x)y''+2(1-x)y'+2y=0$ 之兩獨立解。則下列何者爲 $(x^2-2x)y''+2(1-x)y'+2y=6(x^2-2x)^2$ 之通解？

(A) $c_1x^2+c_2(x-1)+x^4-4x^3$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(B) $c_1x^2+c_2(x-1)-\frac{27}{10}x^6+\frac{61}{5}x^5-9x^4$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(C) $c_1x^2+c_2(x-1)-\frac{1}{5}x^6+\frac{21}{5}x^5-9x^4$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(D) $c_1x^2+c_2(x-1)-5x^4+8x^3$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

3 已知微分方程式 $y'+\alpha y=g(x)$ 的通解爲 $y(x)=ce^{-3x}+2xe^{-3x}$，其中 α、c 爲常數，$g(x)$ 爲未知函數，求 α 及 $g(x)$。

(A) $\alpha=-3,\ g(x)=2xe^{-3x}$　(B) $\alpha=-3,\ g(x)=4e^{-3x}$

(C) $\alpha=3,\ g(x)=2e^{-3x}$　(D) $\alpha=3,\ g(x)=4xe^{-3x}$

4 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）爲 $L\{f(t)\}$，令 $F(s)=L\left\{\int_0^t e^{-3\tau}\cos 2(t-\tau)d\tau\right\}$，則 $F(2)$ 等於何值？

(A) 1/40　(B) 1/20　(C) 1/4　(D) 1/2

5 已知微分方程式 $x^2y'+3xy=\frac{1}{x},\ x>0,\ y(1)=-1$，其解爲：

(A) $y=x^2-2x^{-3}$　(B) $y=x^2+2x^{-3}$　(C) $y=x^{-2}-2$　(D) $y=x^{-2}-2x^{-3}$

6　令複數 $z=x+iy$，則方程式 $\mathrm{z}^2+\bar{\mathrm{z}}^2=2$ 之幾何圖形為何？

(A)橢圓　(B)拋物線　(C)圓形　(D)雙曲線

7　設複數 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z^{40} 之值為何？

(A) 1　(B) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$

8　假設複數 $z=x+iy$，已知 $z^c=e^{c\log z}$，其中 c 為任意複數值（complex number），試問 $(-i)^i$ 的主要值（principal value）為何？

(A) $e^{\frac{-\pi}{2}}$　(B) 1　(C) $e^{\frac{\pi}{2}}$　(D) 0

9　假設路徑 C 為一逆時針方向的半圓形封閉路徑的邊界，其數學定義式為 $z=2e^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$，試求 $\int_C \dfrac{z+2}{z}dz$ 之值。

(A) $2\pi i$　(B) $4\pi i$　(C) $4+2\pi i$　(D) $-4+2\pi i$

10　有一曲面 $z^2=x^2-y^2$，下列何者為經過點（1,1,1）且為該曲面之法線向量？

(A) $2i-2j-2k$　(B) $2i+2j-2k$　(C) $-2i+2j-2k$　(D) $-2i-2j-2k$

11　在溫度場（temperature field）中，已知熱流（heat flow）之方向為溫度變小最急遽（maximum decrease）的方向，今有一溫度場 $T(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$，其於點 $P(0,1,2)$ 之熱流方向為何？

(A) $[0,\ \ 4,\ \ -1]$　(B) $[0,\ \ -4,\ \ 1]$　(C) $[1,\ \ 0,\ \ 4]$　(D) $[-1,\ \ 0,\ \ -4]$

12　下列何者為線積分 $\int_C xyzds$ 之值？其中 C 的參數化表示式為 $x=2t$；$y=2t$；$z=t+3$，而 $0\le t\le 1$，$S(t)$ 為曲線 C 之長度函數。

(A) 15　(B) $15\sqrt{2}$　(C) $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{15}{2}$

13　設 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&-3&3&-2\\-1&4&1&-1\\0&5&-2&1\\2&-2&0&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，試求矩陣 **A** 與 **B** 之秩（rank）相加值為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

14 下列何者錯誤？

(A)在R^2空間中，0 向量正交於所有的向量 (B)在R^3空間中，0 向量正交於所有的向量

(C)向量$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$正交於向量$\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ (D)向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$正交於向量$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

15 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則$A^{n} = ?$

(A)$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix}$

16 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，試求行列式$|A|$之值。

(A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 28

17 若$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求 A 所有特徵值相加之值。

(A)−1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

18 兩連續隨機變數X、Y之結合機率密度函數（joint probability density function）為
$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求機率$P(Y \le 0.2 \mid X = 0.4)$。

(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{1}{6}$ (D)$\frac{1}{8}$

19 若X為一連續隨機變數（continuous random variable），其機率密度函數（probability density function）為
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x(1+x), & 0 < x < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$，試求$p(x \le \frac{1}{2})$。

(A)$\frac{1}{5}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{3}{7}$ (D)$\frac{1}{2}$

20 假設兩個隨機變數(X,Y)均勻分布在單位圓的內部，其聯合機率密度函數（joint probability density function）為$f(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$，試算出隨機變數$X$的期望值（mean）為何？

(A) 0 (B) 0.5 (C) 1 (D)$1/\pi$